

Алгоритм БПФ и его реализация

Алгоритм дискретного преобразования Фурье (ДПФ):

$$A(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) * \exp(-j * 2\pi n k / N) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) * W^{nk} ,$$

где $X(n)$ - n -ый отсчет входной последовательности, ($n = 0, 2, \dots, N-1$),
 $A(k)$ - k -ый отсчет выходного спектра, ($k = 0, 2, \dots, N-1$),
 $W^{nk} = \exp(-j \cdot 2\pi n k / N)$ - коэффициенты ДПФ.

При реализации БПФ возможно несколько вариантов организации вычислений в зависимости от способа деления последовательности отсчетов на части (прореживание по времени или по частоте) и от того, на сколько фрагментов производится разбиение последовательности на каждом шаге (основание БПФ).

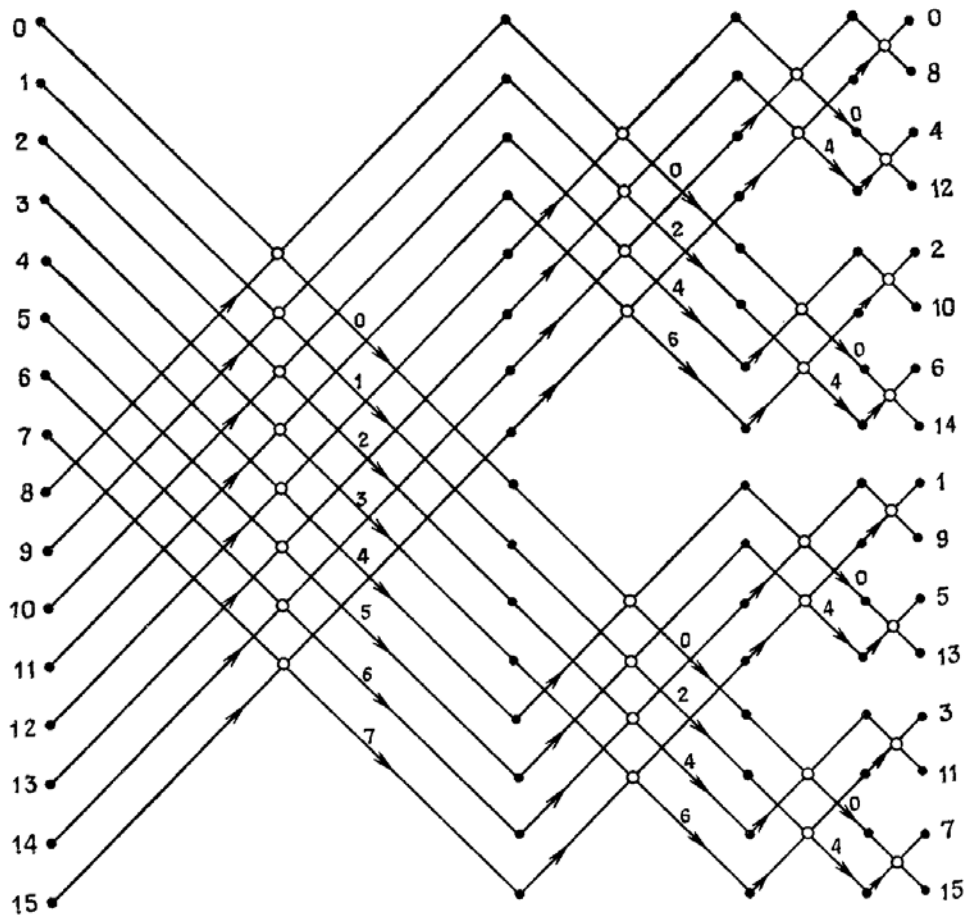
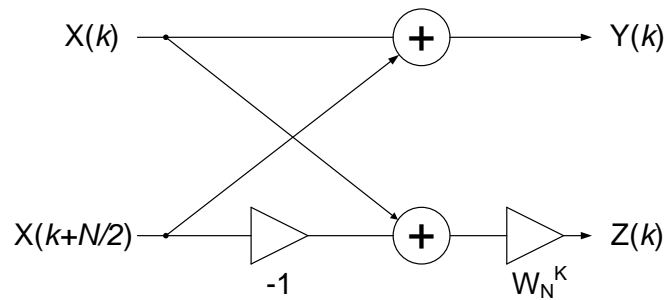


Схема 16-точечного БПФ по основанию 2 с прореживанием по частоте

Светлый кружок на рисунке соответствует операции «бабочка» алгоритма прореживания по частоте:

$$X = \dot{A} + \dot{B}, \quad Y = (\dot{A} - \dot{B})W_N^k$$



Операция «бабочка» алгоритма прореживания по частоте

В БПФ с прореживанием по времени операция «бабочка» в комплексной форме имеет вид:

$$\dot{X} = \dot{A} + \dot{B} \cdot W_N^k, \quad \dot{Y} = \dot{A} - \dot{B} \cdot W_N^k,$$

где \dot{A} и \dot{B} – пара входных отсчетов; \dot{X} и \dot{Y} – пара выходных комплексных отсчетов; $W_N^k = \exp(-j2\pi k / N)$ – комплексный множитель.

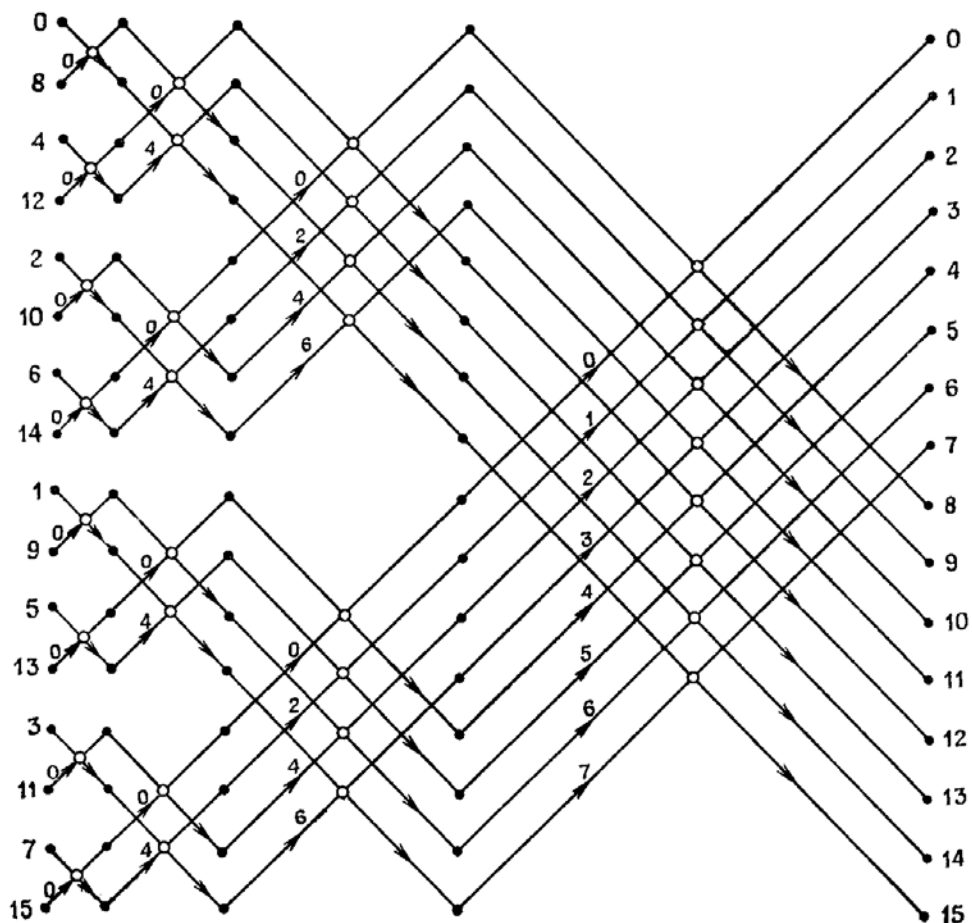


Схема 16-точечного БПФ с прореживанием по времени

Количество итераций, необходимых для вычисления N -точечного БПФ по основанию 2, равно $N_{ит} = \log_2 N$

Алгоритм работы БПФ с прореживанием по частоте можно записать следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{2m}^{i+1}(k) = X_m^i(k) + X_m^i\left(k + \frac{N}{2M_i}\right); \\ X_{2m+1}^{i+1}(k) = \left[X_m^i(k) - X_m^i\left(k + \frac{N}{2M_i}\right) \right] W_N^k; \\ i = 0, 2, \dots, \log_2 N - 1; \\ m = 0, 1, \dots, M_i - 1; \\ k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2M_i} - 1, \\ M_{i+1} = 2M_i; \quad (M_0 = 1) \end{array} \right.$$

где i – номер итерации,

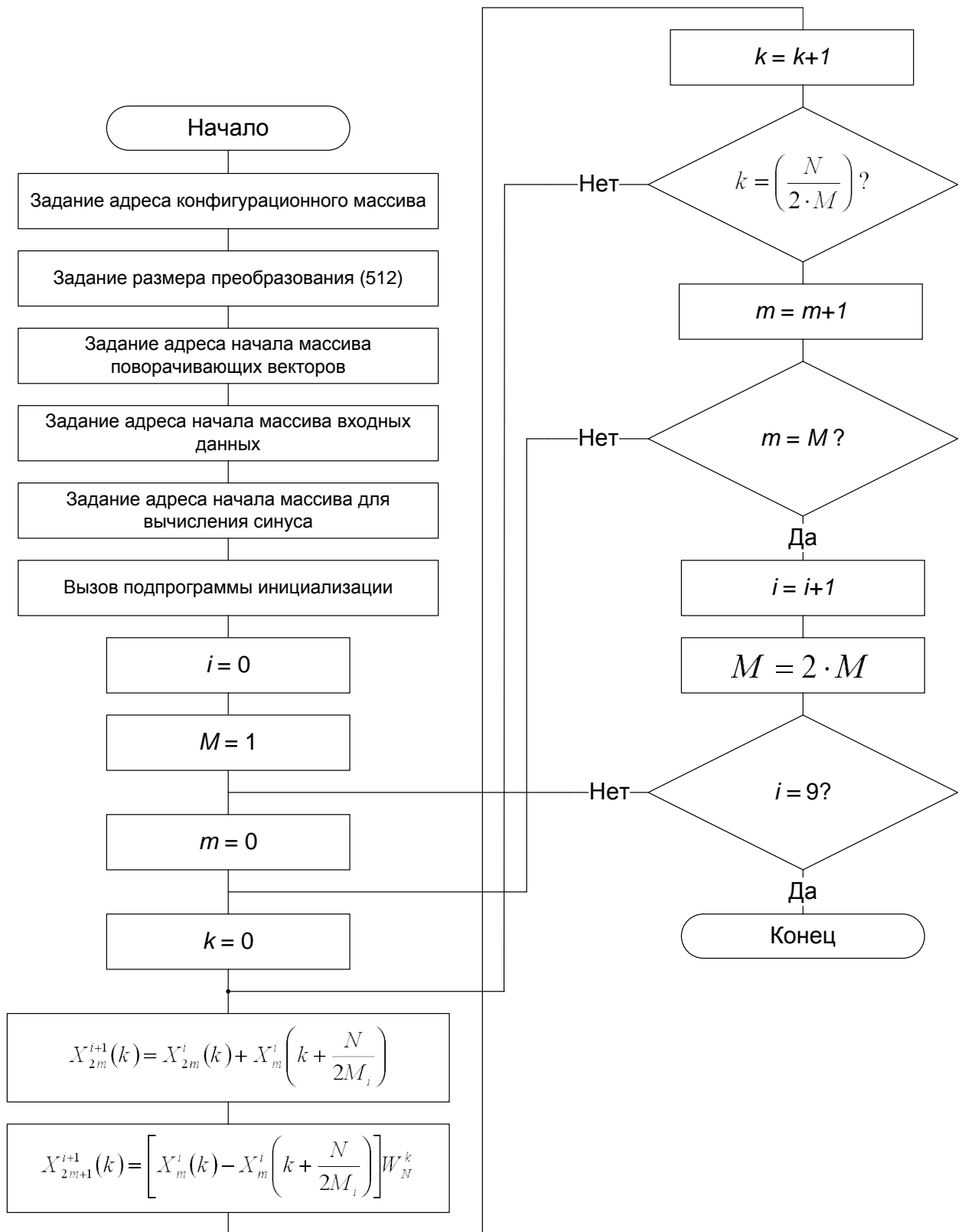
M_i – количество групп отсчетов на i -ой итерации,

m – номер группы отсчетов внутри итерации,

k – номер отсчета внутри группы,

$W_N^k = \cos(2\pi k / N) - j \sin(2\pi k / N)$ - комплексные весовые коэффициенты.

При сделанных обозначениях программная реализация алгоритма БПФ содержит три цикла: внешний – по итерациям, средний – по группам отсчетов и внутренний – по номерам отсчетов внутри группы.



Структурная схема программы вычисления БПФ с прореживанием по частоте

Весовая обработка, существенно снижающая уровень боковых лепестков АЧХ каждого спектрального канала ДПФ (БПФ), то есть просачивание сигнала одного канала в соседние, выполняется по алгоритму

$$X(n) = Z(n) * V(n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где $Z(n)$ - n -ый отсчет исходной последовательности,
 $V(n)$ - весовая функция «окна»,
 $X(n)$ - n -ый отсчет «взвешенной» последовательности,
 N - количество точек сходного массива